首都教育高质量发展·中招

数 学

基于旋转视角构图解决几何综合问题

北京师范大学三帆中学朝阳学校 周 旋

几何综合问题是初中学业水平考试试卷中难度较大的一类问题，这类问题通常以图形的性质、判定和图形变化的性质为知识载体，考查学生作图、计算、推理等技能.

旋转是图形的变化方式之一，它为我们提供了一种用运动变化的眼光看图形结构和图形形成过程的新角度.本文借助典型例题的解决，帮助考生形成“旋转”的动态视角来观察图形和想象图形，从而深入掌握旋转的相关知识，在解决几何综合问题时，能综合分析已知条件、图形结构和所求结论，基于旋转的动态视角想象图形的运动，添加适合的辅助线，完成相关证明.

难点突破

1.分析典型例题，运用旋转的方法构图

例 1：如图1，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC$，$\angle ABC=80°$，$\angle A+\angle C=180°$，点 M 是 AD 边上一点，点 N 是 CD 边上一点，$\angle MBN=40°$，求 MN,AM,CN 的数量关系.

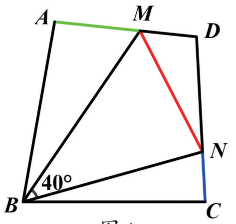


图 1

分析：本题可以从两个角度切入分析.

一方面，结合图形，分析已知条件，能否从旋转的视角来看图？已知 $AB=BC$，如图1，AB 与 BC 是两条有公共端点的相等线段，因此可以联想到线段的旋转，即：线段 BA 绕点 B 顺时针旋转 80° 得到线段 BC，或线段 BC 绕点 B 逆时针旋转 80° 得到线段 BA.

另一方面，结合图形分析所求问题，有什么思路？本题求 MN,AM,CN 的数量关系，如果没有思路，考生可以使用直尺度量线段的长度，借助直观猜想三条线段的关系，再结合条件寻找突破口；通常情况下，可以将三条线段转化为共线的位置关系或转化在一个三角形中，来得到它们的数量关系.考生还要进一步思考，我们具备哪些改变线段位置不改变其长度的经验，对于本题，可否利用旋转实现改变所求线段位置的目的？考生可联想到如果 $\triangle BAM$ 绕点 B 顺时针旋转 80° 得到 $\triangle BCP$，如图2，就可以改变线段 AM 的位置；或 $\triangle BCN$ 绕点 B 逆时针旋转 80° 得到 $\triangle BAQ$，如图3，改变线段 CN 的位置，该问题得解.

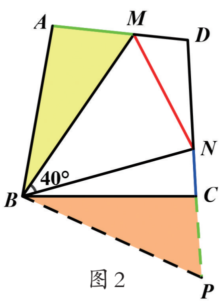


图 2

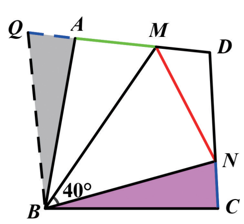


图 3

下面选一种方法进行证明.

解：如图2，延长 DC 至点 P，使得 $CP=AM$，连接 BP.

$\because \angle A+\angle BCD=180°$，$\angle BCP+\angle BCD=180°$，

$\therefore \angle A=\angle BCP$.

$\because AB=BC$，

$\therefore \triangle BAM\cong\triangle BCP$.

$\therefore BM=BP$，$\angle ABM=\angle CBP$.

$\because \angle ABC=80°$，$\angle MBN=40°$，

$\therefore \angle NBP=\angle NBC+\angle CBP=\angle NBC+\angle ABM=40°$.

$\therefore \angle MBN=\angle NBP$.

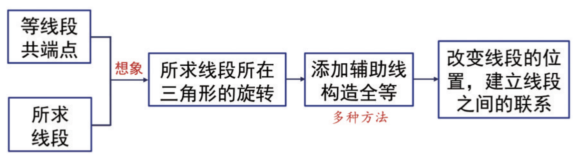
$\therefore \triangle BMN\cong\triangle BPN$.

$\therefore MN=PN$.

$\therefore MN=CP+CN=AM+CN$.

MN,AM,CN 的数量关系是 $MN=AM+CN$.

方法总结：通过例1的求解过程，若条件中有公共端点的两条相等线段，考生可以从动态视角，联想到线段的旋转；再结合所求线段，观察图形，发现所求线段所在的三角形，联想到三角形的旋转，基于想象的三角形旋转，考生可以添加辅助线，构造全等三角形，达到改变线段位置的目的.



2.运用“旋转”视角，解决综合问题

例 2：如图4，已知，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，点 D 为 BC 边上的一点.

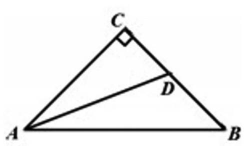


图 4

(1)以点 C 为中心，将 $\triangle ACD$ 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle BCE$，画出旋转后的图形；

(2)延长 AD 交 BE 于点 F，求证：$AF\perp BE$；

(3)若 $AC=\sqrt{5}$，$BF=1$，连接 CF，求 CF 的长度.

分析：根据旋转的性质可以解决(1)(2)，补全后的图形如图5；对于(3)，先从已知线段长出发思考，能求出哪些线段长？容易求得：$AB=\sqrt{10}$，$AF=3$；再思考要想求 CF 的长度，有哪些经验或思路？考生通常要找到 CF 所在的直角三角形，借助勾股定理求其长度，从图5中无法找到以 CF 为边的直角三角形，这就需要添加适合的辅助线.

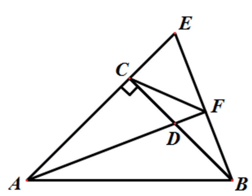
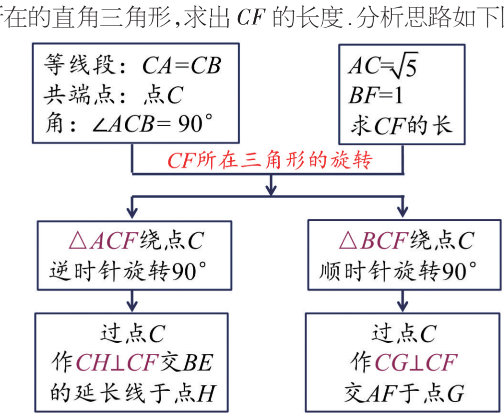


图 5

考生可分析已知条件，题中已知 $AC=BC$，这是两条具有公共端点的相等线段，我们可以联想到线段的旋转，结合(1)的作图，可知 $\triangle BCE$ 是由 $\triangle ACD$ 逆时针旋转 90° 得到的，这是三角形的旋转；基于此，可以联想到所求线段 CF 与线段 AC 构成的三角形 $\triangle ACF$ 的旋转，如图6，或所求线段 CF 与线段 BC 构成的三角形 $\triangle BCF$ 的旋转，如图7，作出相应的辅助线，进而找到所求线段 CF 所在的直角三角形，求出 CF 的长度.分析思路如下图.



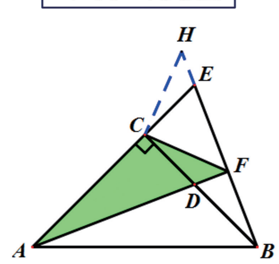


图 6

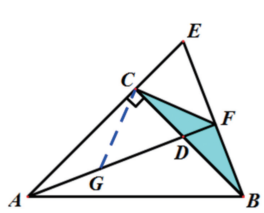


图 7

下面选一种方法进行证明.

解：(1)补全后的图形如图8.

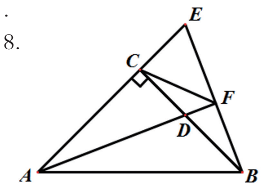


图 8

(2)由(1)得，

$\triangle ACD\cong\triangle BCE$.

$\therefore \angle CAD=\angle CBE$.

$\because \angle ACB=90°$，

$\therefore \angle CAD+\angle CDA=90°$.

$\therefore \angle AFB=180°-(\angle CBF+\angle BDF)=180°-(\angle CAD+\angle CDA)=90°$.

$\therefore AF\perp BE$.

(3)如图9，作 $CG\perp CF$ 交 AF 于点 G.

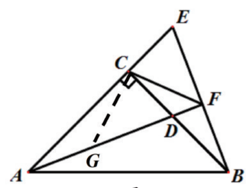


图 9

$\therefore \angle GCF=90°$.

$\because \angle ACB=90°$，

$\therefore \angle ACG=\angle BCF$.

$\therefore \triangle ACG\cong\triangle BCF$.

$\therefore AG=BF$，$CG=CF$.

$\because AC=\sqrt{5}$，

$\therefore AB=\sqrt{10}$.

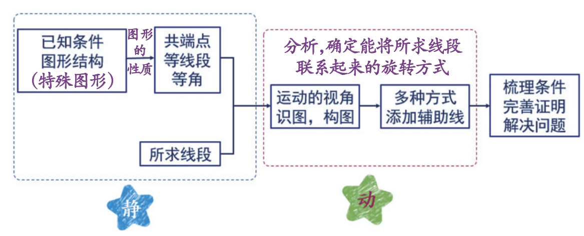
$\because BF=1$，

$\therefore AF=3$，$AG=1$.

$\therefore FG=2$.

$\therefore CF=\sqrt{2}$.

方法总结：在本题的分析和求解过程中，题干中已知的等腰直角三角形和问题中要求的旋转作图，都可以带给我们从“旋转”视角看图的想象，再结合所求线段，可以想象三角形的旋转，指引我们进行构图，从而解决问题.

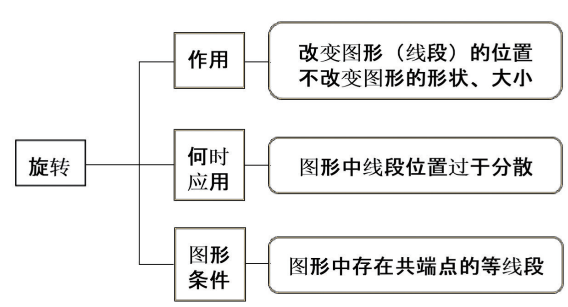


复习建议

几何综合题的知识载体和图形载体十分丰富，观察图形和分析条件的切入点很多，题目综合性较强.

在复习过程中，考生要理解旋转的性质，根据旋转的性质，对图形的旋转带来的相等线段、相等角进行梳理；尤其旋转角是特殊角，如 45°、60°、180°，此时基于图形的旋转，还会产生一些特殊的图形，如等边三角形、等腰直角三角形等；在建构旋转的知识体系时，考生要注重旋转与以往所学几何知识的关联.

另外，旋转也是观察图形时的一种动态视角，当考生发现图形中存在有公共端点的相等线段时，就可以从旋转的视角来看待这两条线段，再结合所求，可以为构图提供思路；特别是要求几条线段的数量关系时，我们常常可以利用旋转的视角，想象图形的运动，从而改变所求线段的位置，将所求线段转移至适合的位置来解决问题.



责编/安京京 版式/罗京京 热线/59102871 邮箱/kaoshibao@bjeea.cn