首都教育高质量发展·高招

数 学

借助导数　提升思维

北京师范大学第二附属中学　高雪松

函数是中学阶段数学的主干知识，而导函数作为微积分的基本概念为中学阶段定量的研究函数性质提供了重要方法。在高考中对导数的考查，不仅要求考生掌握扎实的导数基本概念、导数运算法则，还要能熟练应用相应的概念与法则研究较为复杂的函数性质，并将函数与方程、分类讨论、数形结合等数学思想灵活融合在解题中。因此，考生通过导数的学习过程以及探究利用导数研究函数性质的途径，可以提升数学抽象、逻辑推理、数学运算等核心素养，并逐步培养严谨、灵活、具有创新性的数学思维。

下面结合北京高考试题进行分析，让考生能从考查内容以及思维进阶层度上，更全面地了解和体会北京高考对导数的考查要求与程度。

一、关于曲线的切线的考查

曲线在某一点的切线是这一点与其他点相连形成的割线的极限位置，它刻画的是曲线在一点的局部性质。曲线在某一点的切线的斜率是导数几何意义的重要体现，也是北京高考连续多年重点考查的内容。

【2020年北京高考19题】 已知函数$f(x)=12-x^2$.

(I)求曲线$y=f(x)$的斜率等于-2的切线方程；

(II)设曲线$y=f(x)$在点$(t,\ f(t))$处的切线与坐标轴围成的三角形面积为$S(t)$，求$S(t)$的最小值.

【2021年北京高考19题】 已知函数$f(x)=\dfrac{3-2x}{x^2+a}$.

(1)若$a=0$，求曲线$y=f(x)$在点$(1,\ f(1))$处的切线方程；

【2022年北京高考20题】 已知函数$f(x)=e^x\ln(1+x)$.

(I)求曲线$y=f(x)$在点$(0,\ f(0))$处的切线方程；

【2023年北京高考20题】 设函数$f(x)=x-x^3e^{ax+b}$，曲线$y=f(x)$在点$(1,\ f(1))$处的切线方程为$y=-x+1$.

(1)求a，b的值；

结合以上试题可以看到，考查题型包括通过已知曲线的切线斜率，求相应的切点与切线方程；求已知曲线在某已知点的切线方程；已知含参曲线在已知点的切线方程，求相应的参数值。所以，北京高考对于导数几何意义的考查集中于求曲线的切线这一知识内容上。试题在考查内容（导数的几何意义）、考查方法（点斜式求方程）以及考查难度（基础题目）上都比较稳定。考生只要按照基本步骤作答即可。

1.通过导数的几何意义，利用求导得出相应点的导数值，即切线的斜率；

2.利用点斜式写出切线的方程；

3.通过切点既在切线上，还在曲线上，化简相应的切线方程即可。

其中涉及到的重要核心素养是考生在求导的运算过程中，在理解运算对象（基本初等函数：不超过三次的多项式函数，分式函数，幂、指、对数函数以及三角函数）的基础上，通过对运算过程的评价，合理选择运算法则（导数的四则运算、求导的基本法则，其中复合函数求导仅限于形如$f(ax+b)$的函数）解决相关问题的数学运算核心素养。

该类题型对考生的思维要求是能够通过分析题目的已知条件，正确理解曲线的切线斜率与相应点的导数值之间的关系，运用求导法则即可。

二、关于利用导数研究函数单调性的考查

利用导数研究函数的单调性是研究复杂函数的最值、极值等性质，进而解决存在性问题、恒成立问题以及不等式证明等问题的基础，更是北京高考的重点与难点。

【2016年北京高考18题】 已知函数$f(x)=xe^{2-x}+ex$

(Ⅱ)求$f(x)$的单调区间.

【2017年北京高考19题】 已知函数$f(x)=e^x\cos x-x$.

(Ⅱ)求函数$f(x)$在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值.

【2021年北京高考19题】 已知函数$f(x)=\dfrac{3-2x}{x^2+a}$.

(2)若$f(x)$在$x=-1$处取得极值，求$f(x)$的单调区间，以及其最大值与最小值.

【2022年北京高考20题】 已知函数$f(x)=e^x\ln(1+x)$.

(II)设$g(x)=f'(x)$，讨论函数$g(x)$在$[0,+\infty)$上的单调性

【2023年北京高考20题】 已知函数$f(x)=x-x^3e^{-x+1}$.

(2)设$g(x)=f'(x)$，求$g(x)$的单调区间

结合以上试题可以看到，高考对利用导数研究函数性质的考查首先集中在由分式、指对幂、三角等具体函数构成的复杂函数的单调性的研究上。试题在考查内容（基本初等函数构成的（含参）复杂函数）、考查思想和方法（利用分类讨论、转化与划归等数学思想和方法判断导函数的正负），以及考查难度（中档题目）上也比较稳定。考生只需按以下基本步骤答题即可。

1.求原函数的定义域；2.求导得到导函数；3.判断导函数的正负；4.结合定义域，得到函数在各个相应区间的单调性。

针对北京近年高考题目中判断导函数正负的方法，整理和归纳如下。

年份	相应的导函数	判断导函数取值正负的方法
2016年	$f'(x)=(1-x)e^{2-x}+e=g(x)$ $g'(x)=(x-2)e^{2-x}$	通过对导函数的再次求导，得到导函数最值的正负
2017年	$f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)-1=g(x)$ $g'(x)=-2\sin x\cdot e^x(x\in(0,\frac{\pi}{2}))$	通过对导函数的再次求导，得到导函数最值的正负
2021年	$f'(x)=\dfrac{2(x+1)(x-4)}{(x^2+4)^2}$	将导函数分解为因式相乘形式
2022年	$g'(x)=\dfrac{x\cdot e^x}{(x+1)^2}+\dfrac{e^x}{x+1}+e^x\ln(x+1)(x>0)$	对导函数的各项分别判断正负，进而得到各项和（导函数）正负
2023年	$g'(x)=-x(x^2-6x+6)e^{-x+1}$	将导函数分解为因式相乘的形式，逐个判断各个因式的正负

所以，北京高考对原函数单调性考查的重点以及难点，就是能够选择恰当的方法分析和判断相应导函数取值的正负。这就要求考生在正确运用求导法则和准确运算的基础上，首先能够结合具体的导函数结构特征，通过数学抽象、逻辑推理，选择恰当的需要判断正负的函数（例如2016年、2017年、2021年、2023年试题都可以利用指数函数，或完全平方数的非负性，将需要判断正负的复杂的导函数简化为不超过三次的多项式函数，或者三角函数）；然后选择能够判断导函数取值正负的方法（例如2016年、2017年、2021年和2023年试题都先将导函数分解为因式相乘的形式，通过判断各个因式的正负，得出导函数的正负；2022年试题依据所给自变量的取值范围，对导函数各项的正负逐一判断，得出导函数的正负；而2016年和2017年试题则由于导函数不可分解，无法逐一判断正负，才会再次利用导函数的工具性特征，通过对导函数再次求导研究其最值，得出导函数的正负）。结合以上试题，我们可以看到在判断函数单调性的考查上，要求考生要在解题过程中不断甄别函数的具体特征，回顾相应的方法，择优选择。

考生可结合以下试题，专注于研究相应的导函数，不断尝试更多的判断导函数正负的方法，逐步实现对这个重点知识的掌握。

<table>
<tr><th>导函数</th><th colspan="2">判断导函数取值正负的方法</th></tr>
<tr><td>（2024年西城期末）
$g'(x)=\dfrac{(ax-1)e^{ax}+1}{x^2}$</td><td>$h(x)=(ax-1)e^{ax}+1$
$h'(x)=a^2xe^{ax}$</td><td>（1）简化研究函数为$h(x)$
（2）研究$h(x)$的最值</td></tr>
<tr><td rowspan="2">（2024年西城一模）
$f'(x)=1+\dfrac{1}{x}-(1+x)e^x$
$(x<0)$</td><td>$f'(x)=(1+x)(\dfrac{1}{x}-e^x)$</td><td>**方法一：**将导函数分解因式</td></tr>
<tr><td>当$x\in(-\infty,-1)f'(x)>0$
$x\in(-1,0)f'(x)=g(x)$，
$g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-(2+x)e^x<0$
$f'(x)<f'(-1)=0$</td><td>**方法二：**
结合自变量的取值范围，
分区间讨论导函数的正负</td></tr>
<tr><td rowspan="3">（2024年西城二模）
$g'(x)=-4a\sin x+2(a^2+1)$</td><td>$g'(x)=2\left[(a-\sin x)^2+\cos^2x\right]$</td><td>**方法一：**配方判断正负</td></tr>
<tr><td>$g'(x)=-4a\left(\sin x-\dfrac{a^2+1}{2a}\right)$
$\dfrac{a^2+1}{2a}\geqslant1\quad\sin x\leqslant1$
所以，$g'(x)\geqslant0$</td><td>**方法二：**
利用均值定理，三角函数有界性，判断导函数正负</td></tr>
<tr><td>$g'(x)=-4a\sin x+2(a^2+1)$
$\sin x\leqslant1$　且　$a>0$
$g'(x)\geqslant-4a+2a^2+2\geqslant0$</td><td>**方法三：**
利用三角函数有界性，通过放缩，判断导函数正负</td></tr>
</table>

三、关于利用导数研究函数极值、最值等性质以及证明不等式的考查

函数的极值（局部性质）、最值（全局性质）、函数的零点（方程的根、曲线的交点）、存在性、恒成立问题，以及不等式证明等问题解决的关键，首先是将问题转化为相应的导数问题，其次是确定要研究的函数，然后再通过研究相应函数的单调性来解决。

高考试题	解题思路
（2020年北京高考19题） 已知函数$f(x)=12-x^2$. (II)设曲线$y=f(x)$在点$(t,\ f(t))$处的切线与坐标轴围成的三角形面积为$S(t)$，求$S(t)$的最小值.	利用切线知识，得到相应的图形面积表达式，通过求导得到其最值
（2022年北京高考20题） 已知函数$f(x)=e^x\ln(1+x)$. (III)证明：对任意的$s,t\in(0,+\infty)$，有$f(s+t)>f(s)+f(t)$. （将问题转化为证明：$f(s+t)-f(s)>f(t)-f(0)$）	通过构造函数$h(x)=f(x+t)-f(x)$将问题转化为证明$h(x)$单调递增即可
（2023年北京高考20题） 已知函数$f(x)=x-x^3e^{-x+1}$. (Ⅲ)求函数$f(x)$的极值点的个数.	通过求导，转化为判断导函数的变号零点个数

综上，高考对于导数应用问题的考查不仅体现在考查内容上，即要求考生掌握全面的基础知识、扎实的基本功（求导函数类型全面，求导法则运用准确）；还要求考生能熟练运用数学抽象、逻辑推理素养，并结合分类讨论、数形结合、转化与划归的数学思想和方法，精准分析、灵活转化、正确解决问题（会构造，能分析）。

责编/胡梦蝶　版式/马婷婷　热线/59102872　邮箱/kaoshibao@bjeea.cn